Cours du 08.03.2021

lundi, 8 mars 2021 18:28

Colinéaire vs Non-colinéaire

2 vecteurs sont COLINÉAIRES si ils sont égaux à un multiple scalaire près.

C'est le cas

$$\vec{x} = \lambda \cdot \vec{y} \quad \text{par un } \lambda \in \mathbb{R}$$

ou si $\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \vec{0}$ a au moins une solution autre que $\alpha = \beta = 0$

Si c'est le cas, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont de même ***DIRECTION*** (pas nécessairement de même longueur ou de même sens)

Combinaison linéaire de N vecteurs est simplement la SOMME PONDEREE des N vecteurs (le résultat est un vecteur)

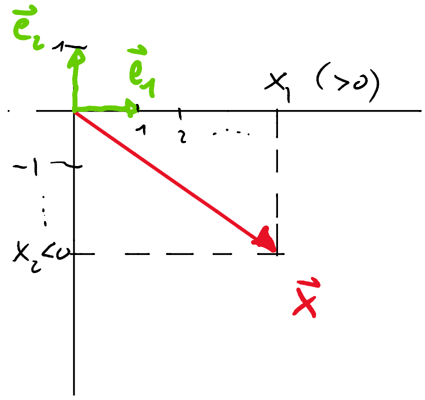
$$\vec{z} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_N \vec{x}_N = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \vec{x}$$

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ on peut écrire n'importe quel vecteur comme la COMBINAISON LINÉAIRE de deux vecteurs "élémentaires" :

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

N'importe quel vecteur du plan qui s'écrit sous la forme

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$$



Les vecteurs "élémentaires" permettent d'écrire

Les vecteurs "élémentaires" permettent d'écrire n'importe quel vecteur du plan par une combinaison linéaires, ET on "abrège" la combinaison linéaire sous forme de "vecteur" : $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \left(= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \right)$

Ce n'est rien d'autre qu'une notation abrégée de la combinaison linéaire !

Cela sous-entend que lorsqu'on écrit un vecteur sous cette forme, cela implique que le 1er vecteur de la combinaison est $\vec{e}_1$ et le second est $\vec{e}_2$.

On dit alors que le couple de vecteurs $E = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \}$ est une ***BASE GENERATRICE*** du plan $\mathbb{R}^2$.

↳ elle permet d'écrire TOUT vecteur du plan comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs !

On l'appelle en général la ***base CANONIQUE*** du plan cartésien.

Digression : avec les nombres nous avons vu les notations du type

$$10 = (10)_{10} = 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 = (1010)_2$$

On peut imaginer que nous ayons d'autres vecteurs dans la base, donc que nous ayons une AUTRE base génératrice dans laquelle on écrit nos vecteurs

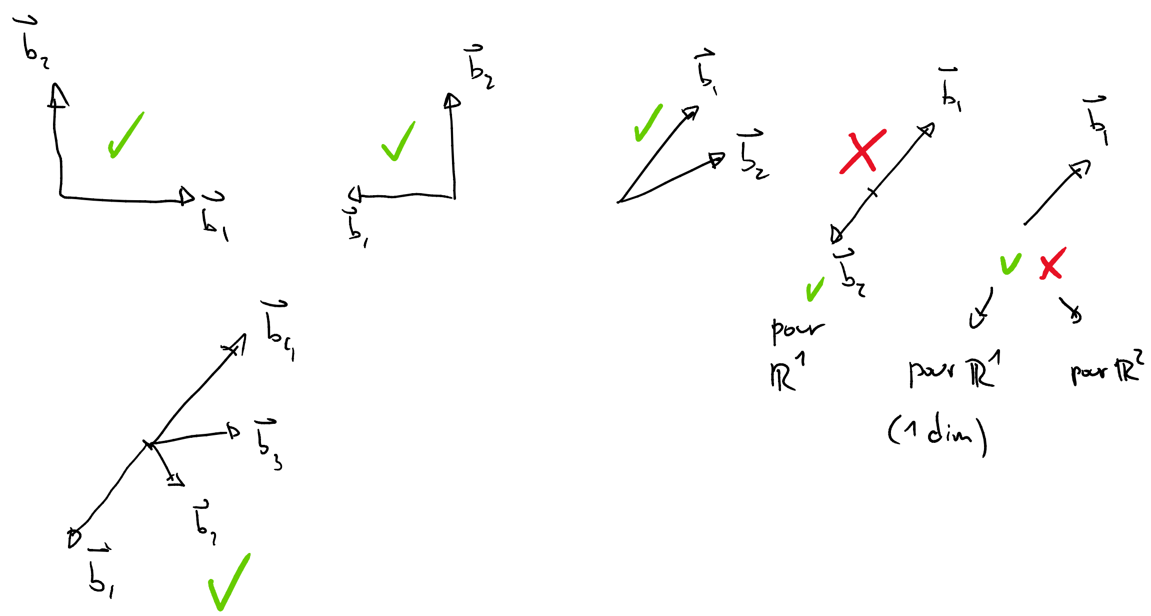
Base B = $\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k \}$ où $\vec{b}_1, \vec{b}_2 \dots \in \mathbb{R}^N$

La base est dit génératrice si TOUS les vecteurs de $\mathbb{R}^N$ peuvent s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des K vecteurs $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$.

Restreignons nous au cas de $\mathbb{R}^2$: quelles seraient les conditions de ma base B pour qu'elle soit génératrice de $\mathbb{R}^2$?

$$\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + 1384 \cdot \vec{0} + 627 \cdot \vec{0}$$

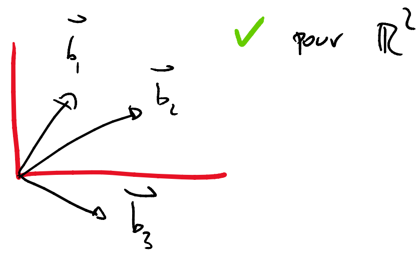
on peut l'avoir, c'est INUTILE !



Dans $\mathbb{R}^{N}$ il faut au moins **N** vecteurs NON-COLINÉAIRES pour former une base !

Si une base a EXACTEMENT N vecteurs NON-COLINÉAIRES, on dit que c'est une base MINIMALE !

Notion de "colinéarité" qui est implicite dans la définition d'une base.



Ces 3 vecteurs ne sont PAS colinéaires, pourtant, ils ne forment PAS une base de $\mathbb{R}^3$!

Vecteurs 2 à 2 ont une notion de colinéarité.
Un ensemble de vecteurs "libre", dit "Famille libre", est ensemble dans lequel AUCUN des vecteurs ne peut être écrit comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Famille libre de
2 vecteurs => les 2 vecteurs sont NON-colinéaires
3 vecteurs => les 3 vecteurs ne sont PAS dans le même plan (à 2 dimension)

N vecteurs => les N vecteurs ne se trouvent pas dans le même "hyper-plan" de dimension N-1 !

3D: ces 3 vecteurs sont-ils libres

$$\left\{ \overset{\vec{x}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{\vec{y}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \overset{\vec{z}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}} \right\}$$

$\vec{x} + \vec{y} = \vec{z} \Rightarrow$ PAS Libre

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Autrement, on peut vérifier si une famille de vecteurs est LIBRE s'il n'existe AUCUNE combinaison linéaire NON-NULLE des vecteurs pour trouver le vecteur $\vec{0}$.

$\lambda_1 \vec{x} + \lambda_2 \vec{y} + \lambda_3 \vec{z} = \vec{0}$ implique que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$!

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \lambda_3$$

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right) = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \left.\begin{matrix} \lambda_1 = 3\lambda_2 \\ \lambda_1 = 2\lambda_2 \end{matrix}\right\} \lambda_1 = \lambda_2 = 0\,! \quad \Rightarrow \lambda_3 = 0\,!$$

Une base génératrice comporte AU MOINS une (sous-)famille libre de N vecteurs !

Dans R^N , tout ensemble de vecteurs ayant plus que N vecteurs ne peut pas être LIBRE !

Par exemple, dans le plan R^2, on ne peut pas avoir plus de 2 vecteurs dans une famille libre.